Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

РЕФЕРАТ

По предмету: «Непрерывные математические модели»

Выполнила:
студентка 1 курса магистратуры 511 группы
Кобзева Виолетта Михайловна
Преподаватель:
Белолипецкий Александр Алексеевич

г. Москва, 2020 г.

Содержание

Примеры уравнения колебаний (математический маятник, грузик на жёсткой пружине, жидкость в сообщающихся сосудах, колебания заряда в электрическом контуре, колебания численности сотрудников в фирме). Решение неоднородного уравнения колебаний.

Определение. Колебание – повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

Рассмотрим две классификации колебаний.
По физической природе:

- Механические (математический маятник, грузик на пружинке, жидкость в сообщающихся сосудах)
- Электромагнитные (колебание заряда в электрическом контуре)
- Тепловые
- Комбинация вышеперечисленных

По характеру взаимодействия с окружающей средой:

- Вынужденные – колебания, протекающие в системе под влиянием внешнего периодического воздействия. Может возникнуть такое явление как резонанс – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. *Резонанс* возникает только в том случае, когда частота собственных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия.
- Свободные (собственные) – колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система была выведена из состояния равновесия. В реальных условиях свободные колебания всегда *затухающие,* так как энергия системы уменьшается с течением времени (за счет силы трения, сопротивления и т.п.).
- Автоколебания – колебания, при которых система имеет запас потенциальной энергии, которая расходуется на совершение колебаний (механические часы).

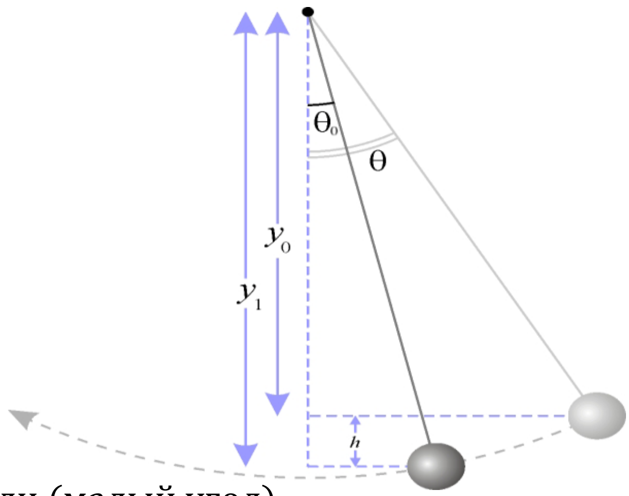
Рассмотрим примеры механических колебаний.

I. Математический маятник – тело небольших размеров, подвешенное на легкой нерастяжимой нити длиной l в поле тяжести Земли.

В условиях задачи тело на нити считаем материальной точкой массой m (имеет массу, не имеет размера).

Опишем общий подход к описанию гармонических колебаний механических систем с одной степенью свободы.
Пусть q – обобщенная координата (угол поворота, смещение), $\dot{q}$ – обобщенная скорость (угловая скорость, скорость смещения).

Далее записываются уравнения для потенциальной и кинетической энергий через $q, \dot{q}$.
Уравнение колебаний для обобщённой координаты q можно получить из закона сохранения энергии.



Решение.
$q = \theta -$ угол отклонения от вертикали (малый угол),
$\dot{q} = \dot{\theta} -$ мгновенная угловая скорость. Запишем уравнения для потенциальной и кинетической энергий.

$$E_K = \frac{mv^2}{2}, \text{так как } v = \dot{\theta} \cdot l \Rightarrow E_K = \frac{m\dot{\theta}^2 l^2}{2},$$

$$E_\text{П} = mgh, \cos\theta = \frac{y_0}{y_1} = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = l(1-\cos\theta) \Rightarrow E_\text{П} = mgl(1 - cos\,\theta),$$

$$1-\cos\theta = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta^2}{2}, \text{так как при малых углах } sin\,\theta \approx \theta \Rightarrow E_\text{П} = \frac{1}{2}mgl\theta^2.$$

Из закона сохранения энергии получаем:

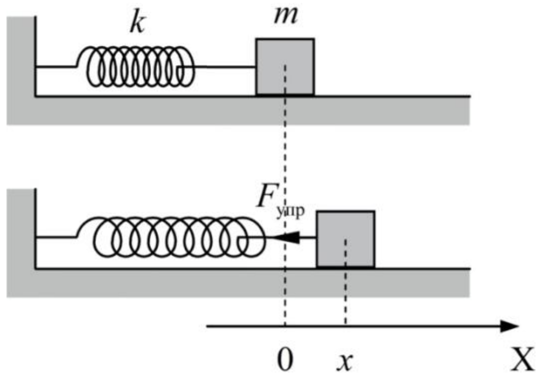
$$E_K + E_\text{П} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = const, \text{продифференцируем по } \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta = 0 - \text{уравнение колебаний.}$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{где } \omega_0 - \text{частота колебаний; } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}, \text{где } T - \text{период колебаний.}$$

II. Груз на жесткой пружине (рассмотрим горизонтальные колебания, пренебрегая силой трения).



Решение.
$q = x -$ смещение груза,
$\dot{q} = \dot{x} -$ скорость перемещения груза.
Запишем уравнения для потенциальной и кинетической энергий.

$$E_K = \frac{mv^2}{2}, \text{так как } v = \dot{x} \Rightarrow E_K = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

Пружина при растягивании приобретает потенциальную энергию, которая равна работе, которую мы затрачиваем при растяжении пружины.

$$dA = Fdx \cdot \cos\alpha = Fdx \cdot \cos 0 = Fdx,$$

Где dA – элементарная работу, которую мы совершаем, α – угол между прикладываемой нами силой F и вектором перемещения dx. Так как мы действуем против силы $F_{\text{упр}}$, то по 3 закону Ньютона $F_{\text{упр}} = F$ – по модулю, также по закону Гука $F_{\text{упр}} = -kx$, где k – коэффициент жесткости пружины.

$$dA = F_{\text{упр}}dx = -kxdx \Rightarrow A = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2},$$

$$\text{Знаем, что } A = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2} = 0 - E_{\Pi 2} \Rightarrow E_{\Pi 2} = -\left(-\frac{kx^2}{2}\right),$$

где $E_{\Pi 1}$ и $E_{\Pi 2}$ потенциальная энергия в положении 1 и 2 соответственно.

Аналогично предыдущей задаче записываем закон сохранения энергии и дифференцируем по обобщенной координате:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{x}x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

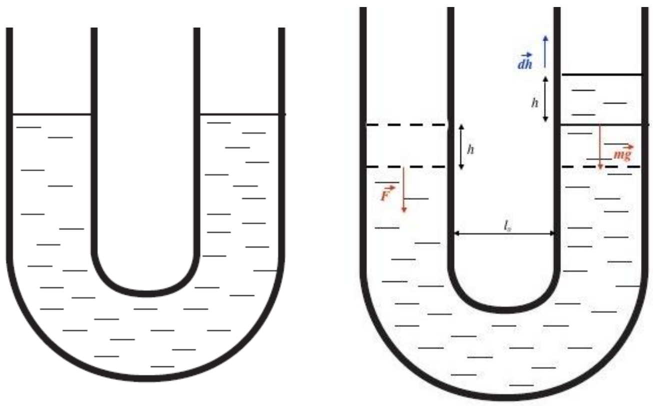
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

III. Жидкость в сообщающихся сосудах (будем пренебрегать силой трения, натяжения и т.п.).

Решение.

$q = h$ – сдвигаем жидкость в одном колене на эту величину,

$\dot{q} = \dot{h}$ – скорость движения всей жидкости, общая масса жидкости M. Высота столба жидкости в спокойном состоянии l. Расстояние между сосудами l_0. Площадь поперечного сечения сосуда S. Воспользуемся также законом сохранения энергии.



$$E_K = \frac{M\dot{h}^2}{2}, M = S(2l + l_0)\rho \Rightarrow E_K = \frac{S\rho(2l + l_0)\dot{h}^2}{2}.$$

Чтобы вывести систему из равновесия, мы будем совершать работу и двигать поршень с силой F и сместим поршень на h. Разность между уровнями воды в сосуде будет $2h$, сила F по модулю будет равна mg, где m – масса столба воды высотой $2h$ (так как должен выполняться 3 закон Ньютона для равновесия системы). Таким образом найдем элементарную работу.

$$\mathrm{dA} = \mathrm{Fdh} \cdot \cos 180^\circ = -\mathrm{Fdh} = -\mathrm{mgdh} = -2\mathrm{hS\rho gdh} \Rightarrow \mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{h}} \mathrm{dA} =$$

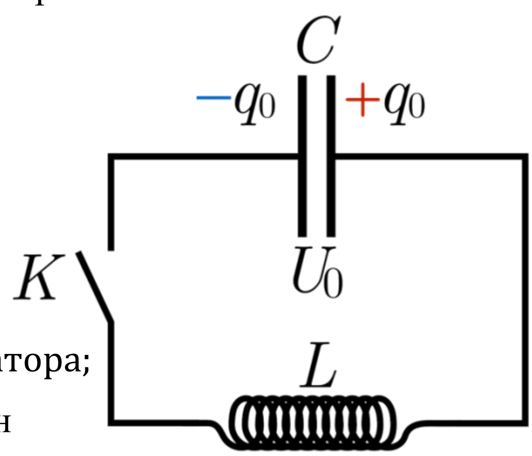
$$= -\int_0^{\mathrm{h}} 2\mathrm{hS\rho gdh} = -\mathrm{S\rho gh}^2, \text{также } \mathrm{A} = \mathrm{E}_{\Pi 1} - \mathrm{E}_{\Pi 2} = -\mathrm{E}_{\Pi 2} \Rightarrow \mathrm{E}_{\Pi 2} = -\mathrm{A}$$

$$E_K + E_{\Pi 2} = \frac{S\rho(2l + l_0)\dot{h}^2}{2} + S\rho g h^2 = const, \text{дифференцируем по } h \Rightarrow$$

$$S\rho(2l + l_0)\ddot{h} + 2S\rho g h = 0 \Rightarrow \ddot{h} + \frac{2g}{(2l + l_0)} h = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{(2l + l_0)}}.$$

IV. Колебание заряда в электрическом контуре.

Данную задачу можно рассмотреть по аналогии с предыдущими задачами, но для краткости изложения, просто сведем электромагнитные колебания в контуре к механическим колебаниям.



Рассмотрим момент времени, когда заряд конденсатора максимален и равен q_0, а ток отсутствует. Энергия магнитного поля катушки в этот момент равна нулю. Тогда получается, что вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе.

$W = W_{\text{эл}MAX} = \frac{{q_0}^2}{2C}$, где C − емкость конденсатора;

Когда, ток максимален, то конденсатор разряжен и соответственно энергия конденсатора равна 0. Вся энергия контура находится в катушке.

$W = W_{\text{маг}MAX} = \frac{L{I_0}^2}{2}$, где L − индуктивность катушки;

Получается, что в произвольный момент времени:

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{маг}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = W_{\text{эл}MAX} = W_{\text{маг}MAX} = const.$$

Можно также продифференцировать уравнение полной энергии, и учесть факт, что $I = \dot{q}$, тогда получим уравнение:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

V. Колебание числа сотрудников в компании.

Рассмотрим интервал времени, когда зарплатный бюджет компании является константой и весь бюджет распределён между сотрудниками. Компания находится в состоянии равновесия, то есть у нас есть N_0 − сотрудников, и p_0 − зарплата, закоторуюонработаю.

Рассмотрим как влияет выведение системы из равновесия за счет изменения числа сотрудников и как это повлияет на зарплату при неизменно зарплатном бюджете.

$\frac{dp}{dt} = k_1(N - N_0)$, если количество сотрудников выросло, то есть $N > N_0$, то зарплата снизится, $\frac{dp}{dt} < 0$, так как бюджет ограничен, придется забрать часть з/п у других сотрудников и отдать новому сотруднику. Если наоборот какой-то сотрудник уйдет, то его з/п поделят между другими сотрудниками и получатся, что при $N < N_0$, $\frac{dp}{dt} > 0$, таким образом для выполнения равенства

$$\frac{dp}{dt} = k_1(N - N_0), k_1 < 0, \text{либо} \frac{dp}{dt} = -k_1(N - N_0), k_1 > 0. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим как влияет выведение системы из равновесия за счет изменения з/п сотрудников. Если $p > p_0$, то есть увеличился зарплатный бюджет, то количество сотрудников увеличится, так как можно принять новых сотрудников и получаем $\frac{dN}{dt} > 0$, если $p < p_0$, либо кого-то уволят, чтобы не сокращать зарплату остальным, либо кому-то снизят зарплату и люди сами начнут уходить, тогда $\frac{dN}{dt} < 0$, таким образом:

$$\frac{dN}{dt} = k_2(p - p_0), k_2 > 0. \quad (2)$$

Продифференцировав уравнения (1) и (2) по времени получим:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -k_1\frac{dN}{dt} = -k_1k_0(p - p_0), \qquad \frac{d^2N}{dt^2} = k_2\frac{dp}{dt} = -k_1k_0(N - N_0),$$

Получаем уравнения колебаний, которые по структуре похожи на однородное уравнения механических и электромагнитных колебаний:

$$\ddot{p} + k_1k_2(p - p_0) = 0, \qquad \ddot{N} + k_1k_2(N - N_0) = 0.$$

Решение неоднородного уравнения колебания.

Все полученные нами уравнения колебаний были однородные и имели вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 - \text{однородное уравнение колебаний},$$
$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = f(t) - \text{неоднородноеуравнениеколебаний}.$$

Решение неоднородного уравнения находится методом вариации постоянных. Но сначала надо решить однородное уравнение колебания.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,$$

Общее решение с корнями характеристического многочлена вида: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, для каждой пары $-C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$ В нашем случае общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t\, ,\, C_1, C_2 \text{константы.}$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $C_1(t)\cos\omega_0 t + C_2(t)\sin\omega_0 t\, , C_1(t), C_2(t)$ – находятся из системыуравнений.

$$\begin{cases} C_1{}'cos(\omega_0 t) + C_2{}'\sin(\omega_0 t) = 0 \\ -\omega_0 C_1{}'sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2{}'\cos(\omega_0 t) = f(t) \end{cases}$$

Решив систему, решим неоднородное уравнение колебаний.

Модель коллективного поведения Краснощекова. Обоснование существования решения.

Наверняка каждый из нас сталкивался с ситуацией, когда кто-то из нашего окружения или мы сами меняли свое мнение, решение под влиянием общественного мнения. Модель Краснощекова как раз и является математической моделью, которая описывает поведение индивидуума, изменение его решений в коллективе, где каждый член коллектива может повлиять на выбор этого индивидуума.

При исследовании такого сложного социального явления необходимо построить математическую модель. Во-первых, модель позволит не изучать проблему путем проведения экспериментов над самими объектами исследования. Во-вторых, при построении модели можно выделить наиболее важные факторы, которые исследователь хочет рассмотреть, тем самым построив модель, которую можно изучить с помощью известного математического аппарата. Наконец, модель позволит прогнозировать результаты, которые будут иметь доказательство. Правда в этом случае нужно помнить о границах применения модели и о тех упрощениях, которые были допущены.

Построение модели.

Начнем с того, что индивидуум принимает решение о вхождении им в какое либо состояние (вступить в какую-то партию, проголосовать за кандидата, участие в мероприятии и т.д.).

Введем понятия априорного и апостериорного отношения к состоянию, иными словами априорное отношение – личное отношение индивида, апостериорное – отношение, которое сформировалось под влиянием общественного мнения.
Пусть у нас есть коллектив из N – членов, и рассмотрим необходимые нам показатели описывающие поведение j индивидуума.
Положим $\alpha_j -$ вероятность готовности индивида перейти в состояние (априорное отношение), $P_j -$ вероятность окончательного решения о переходе в состояние. Также нужно учесть индивидуальность личностей, кто-то больше подвержен влиянию общественного мнения, кто-то меньше, поэтому вводится показатель μ_j – вероятность того, что индивид ведет себя в данной ситуации как независимый, $\mu_j = 1$ – значит что индивид абсолютно не зависит от чужого мнения, $\mu_j = 0$ – абсолютно зависит.
У абсолютно независимого индивида $P_j = \alpha_j$, так как никто не может на него повлиять.
Для определения апостериорной вероятность для абсолютно зависимого индивида введем величину $\lambda_{ji} -$ вероятность того, что j индивид поступит также, как i-ый, то есть перейдет в состояние P_i. Также для абсолютно зависимого человека, учтем, что сам на себя он влиять не может, то есть $\lambda_{jj} = 0$, зато на него может влиять любой другой член коллектива, то есть $\lambda_{ji} > 0, \forall i \in \overline{1,N}, i \neq j,$ также выполняется $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} = 1,$ и полная вероятность перехода j – абсолютно зависимого индивида: $P_j^0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i$.
По формуле полной вероятности, априорная вероятность произвольного j члена:

$$P_j = \mu_j \alpha_j + (1 - \mu_j) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i, j = \overline{1,N}.$$

$$P = \mathrm{MA} + (\mathrm{E} - \mathrm{M})\Lambda \Rightarrow P = \mathrm{MA} + (\mathrm{E} - \mathrm{M})\Lambda - \text{ в векторном виде,}$$

где Λ – стохастическая матрица из λ_{ji} (так как сумма элементов каждой строки равна 1), M – диагональная матрица μ_j, E – единичная матрица, A и P векторы с координатами α_j, и P_j соответственно.

Обоснование существования решения.
Теперь нужно доказать, что при заданных A, M и Λ существует единственный вектор P и каждая его компонент неотрицательная и не превосходит 1.
Преобразуем

$$P = \mathrm{MA} + (\mathrm{E} - \mathrm{M})\Lambda \Rightarrow (\mathrm{E} - B)P = MA, \text{где } B = (E - M)\Lambda.$$

Пусть не все $\mu_j = 0$, так как если все $\mu_j = 0$, то у нас получается частный случай модели – «стадо». Сначала рассмотрим ситуацию когда $\mu_j \neq 1, \forall j = \overline{1,N}$.
Матрица B – неотрицательная, более того, при N > 2 она неразложимая, так как квадрат матрицы является положительной матрицей, а если бы она была

разложимой, то были бы нулевые элементы. Также стоит заметить что, если B является разложимой, то у нас не может быть в принципе абсолютно зависимых индивидуумов (у разложимой матрицы не может быть 0 на главной диагонали), либо будут выделять некоторые отдельные коллективы. В ситуации N = 1, не существует как такового коллектив, если N = 2, то у нас либо будет также неразложимая матрица, либо будет 1 или 2 абсолютно независимых индивида.
Далее мы знаем, что по теореме Фробениуса-Перрона для числа Фробениуса неразложимой матрицы справедливо неравенство:

$$min \sum_{j=1}^{N} b_{ij} < \lambda(B) < max \sum_{j=1}^{N} b_{ij}, \forall j = \overline{1,N}; \Rightarrow \lambda(B) < 1$$

так как *(E – M)* неотрицательная и имеет элементы меньше 1 на диагонали.
Также знаем, что справедлив следующий критерий*:* $(\rho E - B)$ – неотрицательно обратимая матрица тогда и только тогда, когда $\rho > \lambda(B)$, где $\lambda(B)$ – число Фробениуса матрицы *B*.
Получается $(\mathrm{E} - B)P = MA$ – имеет единственно неотрицательное решение. Осталось доказать, что элементы вектора P не больше 1.

Всех членов коллектива можно разделить на абсолютно зависимых и остальных. Пусть $\mu_j = 0, \forall j \in K$ и $\mu_j \neq 0, \forall j \in R$ $(R \cup K = \{1,..,N\})$.
Тогда справедливо:

$$P_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i, \forall j \in K; \qquad P_j = \mu_j \alpha_j + (1 - \mu_j) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i, \forall j \in R.$$

Введем множество индексов M: $P_m = max P_j, \forall m \in M, \forall j = \overline{1,N}$.
Покажем, что хотя бы один индекс из *M* содержится в *R*. Докажем от противного. Если это не так, то

$$P_m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} P_i \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} P_m = P_m \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} = P_m \Rightarrow P_i = P_m \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = \{1,..,N\}$ (так как все элементы не отрицательные и сумма всех $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} = 1$) – это противоречит тому, что ни один элемент из *M* не входит в *R*. Следовательно хотя бы один индекс $m^* \in M$, принадлежит также и *R*.

$$P_{m^*} = \mu_{m^*} \alpha_{m^*} + (1 - \mu_{m^*}) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m^* i} P_i \leq \mu_{m^*} \alpha_{m^*} + (1 - \mu_{m^*}) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m^* i} P_{m^*} \Rightarrow$$

$$P_{m^*} \leq \mu_{m^*} \alpha_{m^*} + (1 - \mu_{m^*}) P_{m^*} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m^* i} \leq \mu_{m^*} \alpha_{m^*} + (1 - \mu_{m^*}) P_{m^*} \Rightarrow$$

$$\mu_{m^*}(P_{m^*} - \alpha_{m^*}) \leq 0 \Rightarrow \mu_{m^*}\left(maxP_j - \alpha_{m^*}\right) \leq 0 \Rightarrow maxP_j \leq \alpha_{m^*} \leq 1,$$

так как $\mu_{m^*} > 0$.
Что и требовалось доказать.

В случае, когда появляются абсолютно независимые индивидуумы, то у нас нарушается неразложимость матрицы B, но так как мы знаем, что у группы абсолютно независимых индивидуумов априорное отношение равняется апостериорному, то ранг нашей системы понижается и тогда для новой матрицы, которая является минором матрицы B является неразложимой матрицей и уже относительно нее можно проводить все указанные выше доказательства.